Theorie Woche 11:

◦ Definitheit von Matrizen: Skript S. 117

Neben den tollen Eigenschaften von symmetrischen Matrizen von letzter Woche, finden wir weitere hilfreiche Eigenschaften von symmetrisch positiv **definiten** Matrizen, kurz s.p.d. Nun müssen wir aber ersteinmal bestimmen können, ob eine Matrix positiv definit ist. Die Definition und Eigenschaften zur Definitheit finden sich im Skript. Das meiner Meinung nach wichtigste darin zu findende ist jedoch das Hurwitz-Kriterium für symmetrische Matrizen.

Beispiel 11.1:

Bestimmen Sie die Definitheit folgender Matrizen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

A: $c_1 = \det[1] = 1 > 0, \quad c_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$

$\Rightarrow$ Nach Hurwitz <u>indefinit.</u>

B: $c_1 = \det[2] = 2 > 0, \quad c_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16 - 16 = 0 \gtreqless 0$

$\Rightarrow$ <u>Keine Aussage</u> nach Hurwitz, Vorzeichenregel befolgt aber nicht strikt grösser 0, könnte positiv semi-definit sein aber unklar.

C: $c_1 = \det[2] = 2 > 0$, $c_2 = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 16 > 0$

$$c_3 = \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot \det\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot (24 - 16) = 16 > 0$$

$\Rightarrow$ Nach Hurwitz <u>positiv definit</u>

∘ Symmetrisch positiv definite Matrizen:

Im Unterricht haben wir folgende nennenswerte Eigenschaften & Anwendungen gesehen:

- Alle EW einer s.p.d. Matrix sind reell & positiv
- Man kann mithilfe s.p.d. Matrizen ein Skalarprodukt definieren, und zwar $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{y}$
- Quadriken basierend auf s.p.d. Matritzen bilden Paraboloide ab

∘ Singulärwertzerlegung (SVD): Skript ab S. 161

Der krönende Abschluss der Vorlesung und etwas vom Wichtigsten, das ihr dieses Semester gelernt habt. Man braucht diese Zerlegung vor allem in der Numerik, zum Beispiel für die Ausgleichsrechnung. Die Definition sowie Berechnung der SVD findet ihr im Skript. Es sind ebenfalls einige Beispiele angebracht.

· Ausgleichsrechnung mittels SVD:

Das Kochrezept mit allen nötigen Schritten sowie der theoretischen Grundlage des Algorithmus findet sich in der Lösung der letzten Serie. Darin wird ausserdem auch der Begriff der Pseudoinversen eingeführt, ein äusserst interessantes Konstrukt, welches ihr im Studium mehrmals antreffen werdet.

Im Folgenden werde ich ein Prüfungsbeispiel mit allen Lösungsmöglichkeiten präsentieren:

Beispiel 11.2: Prüfung HS 16

2. Für ein Experiment betrachtet man das folgende Model

$$y = \beta_1 x + \beta_2.$$

Zur Bestimmung der Parameter $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ liegen die folgende Messungen für y_i, $i = 1, 2, 3$, vor:

x_i	2	0	-2
y_i	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$

Die Parameter β_1 und β_2 sollen bestimmt werden, so dass $\sum_{i=1}^{3} |y_i - (\beta_1 x_i + \beta_2)|^2$ minimal wird. Schreiben Sie dies als ein Ausgleichungsproblem der Form

$$A\beta = b$$

und lösen Sie es mit Hilfe der Singulärwertzerlegung.

Ausgleichsrechnung mit SVD:

Die Matrix der Fehlergleichung lautet:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Singulärwertzerlegung:

$$A = U S V^T$$

U: Besteht aus den EV von AA^T

Der Grösse nach sortiert!

V: Besteht aus den EV von A^TA

S: $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_p})$ EW von AA^T oder A^TA $\quad p = \min(m,n)$

Es gibt wieder 2 Möglichkeiten. Man kann zuerst U oder aber V berechnen. Aufgrund der Dimension von A wird U eine 3x3 & V eine 2x2 Matrix.

Die jeweils andere Matrix erhält man mit dem Zusammenhang:

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{s^{(i)}} \quad \text{oder} \quad u^{(i)} = \frac{A v^{(i)}}{s^{(i)}}$$

Berechnet man zuerst V, so muss man den 3. Einheitsvektor von U noch mit Gram-Schmidt oder hier bei einer 3x3 Matrix mit dem Vektorprodukt rechnen. Wir berechnen hier beides

1) U:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(AA^T - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (5-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) - 3 - 3 - 9 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 35\lambda + \cancel{25} - \cancel{5} + \lambda - \cancel{5} + \lambda - \cancel{15} + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 24\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 11\lambda - 24) = \lambda(\lambda-8)(-\lambda+3)$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 8$

$\Rightarrow \quad \sigma_3 = 0 \qquad \underline{\sigma_2 = \sqrt{3}} \qquad \underline{\sigma_1 = 2\sqrt{2}}$ ⚠ Der Grösse nach ordnen!

EV: $\lambda_1 = 0$:

$AA^T x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Kern}(AA^T)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = -2s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow \quad u^{(3)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_2 = 3: \quad (AA^T - 3I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = s \qquad x_1 = s$

$$\Rightarrow u^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lambda_3 = 8: \quad (AA^T - 8I_3)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = s \qquad x_2 = 0 \qquad x_1 = -s$

$$\Rightarrow u^{(1)'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Berechnung von V aus U:

$$v^{(1)} = \frac{A^T u^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \frac{\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$v^{(2)} = \frac{A^T u^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V}} = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

⚠ Wichtig: In der SVD dann V^T

2) Variante zuerst V berechnen (da V kleiner ist wahrscheinlich auch besser):

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

EW: $\det(A^T A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 8-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (8-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 3$$

$$\sigma_1 = 2\sqrt{2} \quad \sigma_2 = \sqrt{3}$$

EV: $\lambda_1 = 8 \quad (A^T A - 8 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \quad x_1 = s \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^{(1)} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

EV: $\lambda_2 = 3 \quad (A^T A - 3 I_2)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_2 = s \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^{(2)} = \underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V}} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{S}} = \underline{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

U aus V berechnen:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{s^{(1)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{s^{(2)}} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$u^{(3)}$ konstruieren mittels Vektorprodukt:

$$u^{(1)} \times u^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Wird <u>immer</u> bereits normiert sein?

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}}$$

Man bemerkt, dass die Vorzeichen der Spalten sich unterscheiden können $\rightarrow$ U & V sind <u>nicht</u> eindeutig. Die Methode 2 war deutlich schneller, lohnt sich wohl aber nur wenn der Dimensionsunterschied 1 beträgt und die Dimension des grösseren höchstens 3, da man ansonsten Gram-Schmidt anwenden muss.

Nun zum lösen des Ausgleichproblems:

Möchte die Residuen minimieren: $\min \|r\|_2^2$

$$\|r\|_2^2 = \|Ac - b\|_2^2 = \|USV^Tc - b\|_2^2$$

$$= \|U(SV^Tc - U^Tb)\|_2^2 \quad | \; U \text{ orth.} \rightarrow \|U\|_2 = 1$$

$$= \|SV^Tc - d\|_2^2 \quad | \; U^Tb = d$$

$$= \|\hat{S}V^Tc - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 \quad | \; S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ müssen $\hat{S}V^Tc = d_0$ lösen!

$\rightarrow$ 2 Fälle

1) $\hat{S}$ invertierbar $\rightarrow$ $c = V\hat{S}^{-1}d_0$

2) $\hat{S}$ nicht invertierbar $\rightarrow$ $y = V^Tc$

$y = \hat{S}^+ d_0 \quad | \; \hat{S}^+ \rightarrow$ Pseudo-inverse

$c = Vy$

Ich benutze U & V aus der 2. Variante:

$$\Rightarrow \hat{S} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \det \hat{S} = 2\sqrt{6} \neq 0 \rightarrow \text{invertierbar!}$$

$$d_0 = U^T \cdot b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

* kann man sich sparen

$$= \underline{\begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow c = V \hat{S}^{-1} d_0 \qquad \hat{S}^{-1} = \frac{1}{\det \hat{S}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}} \qquad = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \hat{S}^{+}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}} \qquad \underline{\underline{\beta_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}}$$